1 Coma Flotante

Cifras significativas: Cifras coincidientes desde la izquierda a partir del primer dígito distinto de 0.
$E_{abs} = |x - \hat{x}|$; $E_{rel} = \frac{E_{abs}}{|x|}$
$E_{rel} = 10^{-(n^{o} cif.signif.)} \iff n^{o} cif. = -\log_{10} E_{rel}$
E_{rel} acotado por $E_{rel} \leq 2^{-(bitsmantisa)}$
Cota de $E_{rel} = \frac{eps(1)}{2}$
$E_{rel} \cong 10^{cif.precis.} \Rightarrow \log_2 E_{rel} = $ num. cifras precisión, para $E_{rel} = 10^{-\text{cifras precisión}}$
$\hat{x} = (0.m_1 m_2 m_3 ... m_n)_2 \cdot 2^e$, para $e = $ exp. denormalizados ; $\hat{x} = (1.m_1 m_2 m_3 ... m_n)_2 \cdot 2^{e-k}$, para $e = \exp, k = $ desp. exp.

2 Interpolación

$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... + n a_n x^{n-1}$

2.1 Aproximación

$$(1 - \tfrac{\lambda}{2}) x_k^3 + \tfrac{\lambda}{2} x_k^2 - 1 \approx y_k \Rightarrow \tfrac{\lambda}{2}(x_k^2 - x_k^3) \approx y_k + 1 - x_k^3 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$H^T H \lambda = H^T b$ ó
$F(\lambda) = (p(x_1) - y_1)^2 + (p(x_2) - y_2)^2 + (p(x_3) - y_3)^2$; para $F'(\lambda) = 0$

2.2 Lagrange

$l_i(x)$ es un polinomio de grado n, $l_i(x_j) = 1$ para $i = j$, $l_i(x_j) = 0$ para $i \neq j$
$p(x) = f(x_0) l_0(x_0) + ... f(x_n) l_n(x_n)$

$$l_i(x) = \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

$B = \{l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)\}$

2.3 Hermite

$f[x_0, x_0 ... x_0] = \frac{f'^k(x_0)}{k!}$, para $k = ($ veces que aparece $x_0) - 1$

2.4 Newton

$p_n(x) = p_{n-1}(x) + f[x_0, x_1, x_2 ... x_n](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$
$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x_1 - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + ... + f[x_0, x_1, x_2 ... x_n](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$
$f[x] = f(x)$
$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$
$f[x_0, x_1 ... x_n] = \frac{f[x_1 ... x_n] - f[x_0 ... x_{n-1}]}{x_n - x_0}$

2.5 Error en Newton

$|e(x)| = |f(x) - p(x)|$; $|e(x_i)| = 0$

$$|e(x)| = |f(x) - p(x)| = |f[x_o, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)|$$

$$e(x) = \frac{f'^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0) \dots (x - x_n)$$

$M = $ cota superior de $f'^{n+1}(x)$, $\forall x \in [a, b]$

$$|e(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |(x - x_0)...(x - x_n)| \ , \forall x \in [a, b]$$

$$\max_{x \in [a,b]} |e(x)| = \frac{M}{(n+1)!} \cdot \max_{x \in [a,b]} |(x - x_0)...(x - x_n)|$$

3 Splines

3.1 Splines de grado 1

$$S_1(x) = \begin{cases} p_1^1(x), \ x \in [x_0, x_1) \\ p_1^2(x), \ x \in [x_1, x_2) \\ \vdots \\ p_1^n(x), \ x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Son necesarios $(n + 1)$ datos, correspondientes a los valores de $f(x_i)$
Debe ser continua en los nodos internos $\Rightarrow s(x_1^-) = s(x_1^+) \Rightarrow b_i = b_{i+1}$ en $p_1^i(x) = ax + b_i$

3.2 Splines de grado 2

$$S_2(x) = \begin{cases} p_2^1(x),\ x \in [x_0, x_1) \\ p_2^2(x),\ x \in [x_1, x_2) \\ \vdots \\ p_2^n(x),\ x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Son necesarios $(n+2)$ datos, correspondientes a los valores de $f(x_i)$ y un dato extra no redundante, por ejemplo
Debe ser continua en los nodos internos $\Rightarrow s_2(x_1^-) = s_2(x_1^+)\ y\ s_2'(x_1^-) = s_2'(x_1^+) \iff p(x) = q(x)\ y\ p'(x) = q'(x)$
Si es simétrico respecto de un punto $x_i \Rightarrow S'(x_i) = 0$
Resolver el sistema de ecuaciones o resolver por Newton

4 Otros

$f(x) = k \quad ; \quad f'(x) = 0$
$f(x) = x \quad ; \quad f'(x) = 1$
$f(x) = ax + b \quad ; \quad f'(x) = a$
$f(x) = u^k \quad ; \quad f'(x) = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$
$f(x) = u \cdot v \quad ; \quad f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$
$f(x) = \frac{u}{v} \quad ; \quad f'(x) = \frac{u' \cdot v + u \cdot v'}{v^2}$
$f(x) = sen\ u \quad ; \quad f'(x) = u'\ cos\ u$
$f(x) = cos\ u \quad ; \quad f'(x) = -u'\ sen\ u$
$f(x) = e^u \quad ; \quad f'(x) = u' \cdot e^u$
$f(x) = lnu \quad ; \quad f'(x) = \frac{u'}{u}$

5 Ejemplos

5.1 Error

$e(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x)(x-h)$, para $\xi \in [0, h] \quad ; \quad f(x) = x - x^2 \quad ; \quad f'(x) = 1 - 2x \quad ; \quad f''(x) = -2 \Rightarrow e(x) = -(x)(x-h) = hx - x^2$
$\frac{de}{dx} = h - 2x = 0 \to x = \frac{h}{2} \quad ; \quad e_{max} = h\frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} = \frac{h^2}{4}$
Para error ≤ 0.01, solo depende de h, por lo que: $\frac{h^2}{4} \leq 0.01 \to h \leq 0.2$

5.2 Spline

$$S_2(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c\ ,\ x \in [-1, 0) \\ Ax^2 + Bx + C\ ,\ x \in [0, 1] \end{cases} \quad S_2'(x) = \begin{cases} 2ax + b\ ,\ x \in [-1, 0) \\ 2Ax + B\ ,\ x \in [0, 1] \end{cases} \quad S_2''(x) = \begin{cases} 2a\ ,\ x \in [-1, 0) \\ 2A\ ,\ x \in [0, 1] \end{cases}$$

$S(0^-) = S(0^+) \to c = C \quad ; \quad S'(0^-) = S'(0^+) \to b = B \quad ; \quad S(-1) = 0 \to a - b + c = 0 \quad ; \quad S(0) = 2 \to c = 2$
$S(1) = 5 \to A + B + C = 5 \quad ; \quad S''(-1) = 0 \to 2a = 0$

$$S_2(x) = \begin{cases} 2x + 2\ ,\ x \in [-1, 0) \\ x^2 + 2x + 2\ ,\ x \in [0, 1] \end{cases}$$